

УДК 551.513.22

**Р. Г. Закинян [R. G. Zakinyan],
К. С. Авакян [Y. A. Semanova],
Ю. А. Семенова [Y. A. Semanova]**

РАЗВИТИЕ ЭКМАНОВСКОЙ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ ПРИ РАЗЛИЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ИЗОБАР

Development of the Ekman's theory of the atmospheric boundary layer at different isobars orientations

В данной работе исследована динамика ветра в пограничном слое атмосферы и показано, что угол наклона ветра у поверхности земли по отношению к изобарам зависит от горизонтальных градиентов давления вдоль параллели и меридиана и не всегда равен 45° .

In the present work the wind dynamics in the atmospheric boundary layer is studied; it is shown that wind slope angle at the ground surface with respect to isobars depends on the horizontal pressure gradients along parallel and meridian and not always equal to 45° .

Ключевые слова: спираль Экмана, пограничный слой атмосферы, геострофический ветер, сила Кориолиса, сила вязкого трения.

Key words: Ekman's spiral, atmospheric boundary layer, geostrophic wind, Coriolis force, viscous force.

На данный момент проблема своевременного прогнозирования опасных метеорологических явлений является актуальной, так как известно, что атмосферные явления категории ОЯ (опасное явление) наносят огромный материальный и экономический ущерб. Одним из наиболее опасных явлений считается ветер, в частности, сильный ветер [1].

Для исследования ветра и его прогнозирования необходимо знание его изменения с высотой. Изменение профиля ветра с высотой рассмотрено, например, в книге «Курс метеорологии (физика атмосферы)» П. Н. Тверского [2], а также в других работах. Данный анализ был проведен впервые Экманом, который показал, что учет сил вязкого трения приводит к тому, что направление ветра у земли составляет 45° с изобарой и только с высотой теоретически на бесконечности принимает направление геострофического ветра. Изменение профиля ветра с высотой получило название спирали Экмана, но эта модель учитывает лишь изменение давления вдоль меридиана, предполагая изменения давления вдоль параллели неизменным.

В статье мы рассматриваем двухмерную модель движения воздуха (модель Экмана) с учетом изменения давления вдоль параллели и меридиана.

В пограничном слое атмосферы можно с достаточной точностью считать турбулентное трение не изменяющимся с высотой, что эквивалентно пренебрежению всеми силами, кроме сил турбулентной вязкости. Но влияние турбулентности существенно и в более высоких слоях, где наряду с этим влиянием необходимо уже учитывать и другие действующие силы, и прежде всего отклоняющую силу вращения Земли (сила Кориолиса).

Для рассмотрения этого вопроса представим уравнение движения в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + 2[\mathbf{v} \dot{\mathbf{u}}_0]. \quad (1)$$

Рассмотрим стационарный случай движения воздуха $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$, уравнение (1) примет вид

$$\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + 2[\mathbf{v} \dot{\mathbf{u}}_0] = 0. \quad (2)$$

Проектируя уравнение (2) на горизонтальную плоскость, тогда при условии горизонтального не изменяющегося во времени ветра получим уравнения:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2(v\omega_{0z} - w\omega_{0y}) = 0, \quad (3a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2(w\omega_{0x} - u\omega_{0z}) = 0. \quad (3б)$$

Найдем проекции угловой скорости вращения Земли, предполагая вертикальную составляющую скорости равной нулю ($\omega_{0x} = 0$, $\omega_{0z} = \omega_0 \sin \varphi$, $w = 0$):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2v\omega_0 \sin \varphi = 0, \quad (4a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2u\omega_0 \sin \varphi = 0. \quad (4б)$$

Умножим на i уравнение (4б) и суммируем с (4a), получим

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + 2\omega_0 \sin \varphi (v - iu) = 0,$$

или

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - 2i\omega_0 \sin \varphi (v + iu) = 0. \quad (5)$$

Введем новую переменную s , удовлетворяющую условию $u + iv = s$, тогда уравнение (5) примет вид

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - 2is\omega_0 \sin \varphi = 0.$$

Обозначим $2\omega_0 \sin \varphi = l$ и получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{il}{\nu} s = \frac{1}{\rho\nu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} i + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (6)$$

решение которого будем искать в виде $s = s_0 + s_1$,

где s_0 — решение однородного уравнения, а s_1 — частное решение соответствующего неоднородного уравнения.

Составим характеристическое уравнение для решения однородной части, получим

$$r^2 - \frac{il}{\nu} r = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{il}{\nu}} = \pm (1+i) \sqrt{\frac{l}{2\nu}}, \text{ введем обозначение } k = \sqrt{\frac{l}{2\nu}} \text{ и получим}$$

$$s_0 = C_1 e^{(1+i)kz} + C_2 e^{-(1+i)kz}. \quad (7)$$

В качестве граничных условий для нахождения констант зададим обращение скорости ветра в нуль на поверхности Земли и обращение ветра в геострофический при безграничном росте высоты

$$s = u + iv = \frac{i}{l\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right) + C_2 e^{-(1+i)kz}. \quad (8)$$

$$\text{Найдем константу } C_2 = -\frac{i}{l\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y} \right).$$

Из формулы расчета скорости геострофической ветра имеем

$$u = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Вернемся к старым переменным и получим

$$u + iv = (iv_g + u_g) (1 - e^{-kz} \cos kz + e^{-kz} i \sin kz). \quad (9)$$

Составляющие скорости из выражения (9) соответственно равны

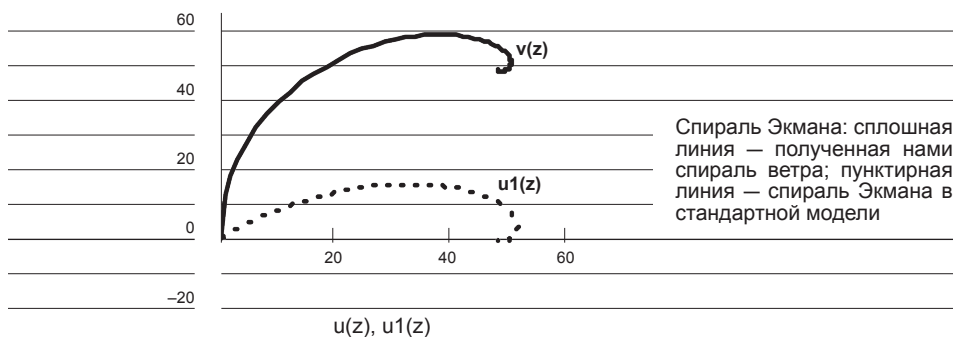
$$u = u_g (1 - e^{-kz} \cos kz) - v_g e^{-kz} \sin kz, \quad (10a)$$

$$v = v_g (1 - e^{-kz} \cos kz) + u_g e^{-kz} \sin kz. \quad (10б)$$

Откладывая в системе координат (u, v) векторы скорости на разных высотах, получим спираль Экмана. На рисунке ниже приведен график спирали Экмана. Найдем угол наклона касательной к графику функции

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u_g + v_g}{u_g - v_g}. \quad (11)$$

Из выражения (11) видно, что угол наклона равен не 45° , а зависит от соотношения составляющих геострафической скорости. На рисунке показана сравнительная характеристика спирали Экмана, построенная по стандартной модели и по полученной нами формуле. Из рисунка видно, что в стандартной модели меридиональная составляющая скорости сначала увеличивается, а потом уменьшается до нуля, в нашей же уточненной модели Экмана при тех же значениях параметров скорость хоть и уменьшается, но нуля не достигает.



Таким образом, учитывая изменение давления вдоль параллели и меридиана в модели Экмана, мы получили формулы для расчета горизонтальных составляющих скорости. Также исследование динамики ветра в пограничном слое атмосферы показало, что угол наклона ветра у поверхности земли по отношению к изобарам зависит от горизонтальных градиентов давления вдоль параллели и меридиана и не всегда равен 45° .

ЛИТЕРАТУРА

1. **Руководство** по краткосрочным прогнозам погоды. Л.: Гидрометиздат, 1986. Ч. I. 704 с.
2. **Тверской П. Н.** Курс метеорологии (физика атмосферы). Л.: Гидрометиздат, 1962. 700 с.

ОБ АВТОРАХ

Закинян Роберт Гургенович, ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики. zakinyan@mail.ru. **Авакян Кристина Станиславовна**, ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», аспирант 1-го года направления «Физика атмосферы и гидросферы». awan.kristina@yandex.ru. **Семенова Юлия Александровна**, ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», магистрант 2-го года обучения направления «Физика Земли и планет. brilliance_wave@mail.ru.

Zakinyan Robert Gurgenovitch, North-Caucasian Federal University, Institute of Natural Sciences, Department Theoretical Physics, Doctor of physical and mathematical sciences, professor. **Avakyan Kristina Stanislavovna**, North-Caucasian Federal University, Institute of Natural Sciences, Department of Theoretical Physics, postgraduate student. **Semenova Yuliya Aleksandrovna**, North-Caucasian Federal University, Institute of Natural Sciences, Department of Theoretical Physics, master of physics.