



Научная статья

УДК 551.51

<https://doi.org/10.37493/2308-4758.2025.2.5>

О РЕЗУЛЬТАТАХ ТЕСТИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА КОАГУЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ

Игорь Сергеевич Афанасьев^{1*},
Борис Азреталиевич Ашабоков²

^{1,2} Высокогорный геофизический институт (д. 2, пр. Ленина, г. Нальчик, 360030, Российская Федерация)

² Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН (д. 37А, ул. И. Арманд, Нальчик, 360000, Российская Федерация)

¹ afanasevigor278@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-4490-6659>

² ashabokov.boris@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2889-0864>

* Автор, ответственный за переписку

Аннотация.

Объектом исследования являются коагуляционные процессы в облаках, которые представляют собой сложную термогидродинамическую и микрофизическую систему, отличающуюся нестационарностью, трехмерностью и нелинейностью. Эти особенности делают численное моделирование основным методом исследования эволюции облаков как в естественных условиях, так и при активном воздействии, что повышает требования к эффективности используемых численных методов, таким как устойчивость, сходимость и экономичность. Разработка или подбор методов, удовлетворяющих этим требованиям, требует тщательного исследования, включая предварительное тестирование этих методов путем сравнения результатов расчетов тестовых задач с их точными решениями. Исследование основано на анализе тестовых задач Коши для кинетического (интегро-дифференциального) уравнения и системы кинетических (интегро-дифференциальных) уравнений коагуляции в однофазных и двухфазных пространственно-однородных дисперсных системах. В ходе работы было установлено, что численные решения, полученные с помощью метода Бубнова – Галеркина и разработанного итерационно-матричного метода, являющегося модификацией метода конечных разностей, хорошо согласуются с аналитическими решениями. Эти методы продемонстрировали свою применимость для моделирования коагуляционных процессов в смешанных дисперсных системах, включая конвективные (градовые) облака. Высокая точность резуль-

татов численного решения тестовой задачи, связанной с коагуляционными процессами в дисперсной среде, по итогам проведенного исследования позволяет сделать вывод о том, что метод Бубнова-Галеркина и итерационно-матричный метод могут быть использованы для исследования микрофизических процессов в конвективных облаках. Численные эксперименты, основанные на этих методах, открывают перспективы для моделирования процессов формирования и развития облаков как в естественных условиях, так и при активном воздействии, в том числе опираясь на опыт, полученный в ходе предыдущих исследований других специалистов в данной области.

Ключевые слова: конвективное облако, коагуляция, кинетическое уравнение, однофазная и двухфазная среда, аналитическое и численное решение, метод Бубнова-Галеркина, итерационно-матричный метод

Для цитирования: Афанасьев И. С., Ашабоков Б. А. О результатах тестирования некоторых алгоритмов расчета коагуляционных процессов в дисперсных системах // Наука. Инновации. Технологии. 2025. № 2. С. 113–134. <https://doi.org/10.37493/2308-4758.2025.2.5>

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 17.02.2025;
одобрена после рецензирования 25.04.2025;
принята к публикации 12.05.2025.

1.6.18. Atmospheric and Climate sciences (Physical and Mathematical Sciences)
Research article

**On the results of testing some algorithms
for calculating coagulation processes
in dispersed systems**

**Igor S. Afanasyev^{1*},
Boris A. Ashabokov²**

^{1,2} High-Mountain Geophysical Institute (2, Lenin Ave., Nalchik, 360030, Russian Federation)

² Institute of Informatics and Regional Management Problems, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (37A, I. Armand St., Nalchik, 360000, Russian Federation)

¹ afanasevigor278@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0003-4490-6659>

² ashabokov.boris@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-2889-0864>

* Corresponding author

Abstract.

The object of the study is coagulation processes in clouds, which are a complex thermo-hydrodynamic and microphysical system characterized by unsteadiness, three-dimensionality and nonlinearity. These features make numerical modeling the main method of studying the evolution of clouds both in natural conditions and under active influence, which increases the requirements for the effectiveness of the numerical methods used, such as stability, convergence and cost-effectiveness. The development or selection of methods that meet these requirements necessitates careful research, including preliminary testing of these methods by comparing the results of calculations of test problems with their exact solutions. The study is based on the analysis of Cauchy test problems for kinetic (integrodifferential) equations and systems of kinetic (integrodifferential) coagulation equations in single-phase and two-phase spatially homogeneous dispersed systems. In the course of the work, it was found that the numerical solutions obtained using the Bubnov-Galerkin method and the developed iterative matrix method, which is a modification of the finite difference method, are in good agreement with the analytical solutions. These methods have demonstrated their applicability for modeling coagulation processes in mixed dispersed systems, including convective (hail) clouds. The high accuracy of the results of the numerical solution of the test problem related to coagulation processes in a dispersed medium, based on the results of the study, allows us to conclude that the Bubnov-Galerkin method and the iterative matrix method can be used to study microphysical processes in convective clouds. Numerical experiments based on these methods open up prospects for modeling the processes of cloud formation and development both in natural conditions and under active exposure, including drawing on the experience gained in previous research by other specialists in the field.

Key words:

convective cloud, coagulation, kinetic equation, single-phase and two-phase medium, analytical and numerical solution, Bubnov-Galerkin method, iterative-matrix method

For citation:

Afanasyev IS, Ashabokov BA. On the results of testing some algorithms for calculating coagulation processes in dispersed systems. Science. Innovations. Technologies. 2025;(2):113-134. (In Russ.). <https://doi.org/10.37493/2308-4758.2025.2.5>

Conflict of interest: the authors declare no conflicts of interests.

The article was submitted 17.02.2025;
approved after reviewing 25.04.2025;
accepted for publication 12.05.2025.

Введение

Современное состояние физики облаков характеризуется сложностью и неоднозначностью. Это обусловлено тем, что, несмотря на недостаточную изученность многих «элементарных» процессов в облаках, существует необходимость исследовать их в целом, поскольку облака представляют собой сложные физические системы. Для дальнейшего развития этой научной области необходимо сформулировать новые направления исследований и решить соответствующие задачи с использованием современных методологий и методов [1].

Важно отметить, что агрегирование «элементарных» процессов в конвективных облаках, которое служит основой их математического моделирования, возможно только в рамках их численных моделей. Элементами этих моделей являются: система уравнений, описывающих динамику различных параметров облаков, начальные и граничные условия, численный метод для проведения расчетов и программное обеспечение [2, 3].

Следует подчеркнуть, что при разработке численных моделей конвективных облаков и проведении численных экспериментов, направленных на изучение их формирования и развития, как в естественных условиях, так и при активном воздействии, возникают значительные трудности. Одним из источников этих проблем является то, что облака представляют собой сложную термогидродинамическую и микрофизическую систему, особенностями которой являются нестационарность, трехмерность и нелинейность [1].

Цель настоящей работы заключается в исследовании возможности использования некоторых численных методов (метода Бубнова – Галеркина [4, 5] и итерационно-матричного метода [4–6]) для исследования роли системных свойств облаков в формировании их макро- и микроструктурных характеристик. Исследования проводились путем решения тестовых задач, в качестве которых использовались задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения и системы интегро-дифференциальных уравнений (с известными аналитическими решениями), описывающих коагуляционные процессы в однофазных и двухфазных пространственно-однородных дисперсных системах [7]. Такой подход позволит оценить при-

менимость и точность указанных методов для численного моделирования облаков.

Материалы и методы исследований

Постановка задачи

Исследование коагуляционных процессов в однофазной среде основывается на расчете функции распределения частиц по массе $f(\xi, t)$. Это приводит к рассмотрению задачи Коши для интегро-дифференциального кинетического уравнения коагуляции, то есть необходимо найти неотрицательную функцию $f(\xi, t)$, удовлетворяющую следующим условиям [7]:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{кг}} = -f(\xi, t) \int_0^\infty K f(\xi, \eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^\xi f(\xi - \eta, t) K(\xi - \eta, \eta) f(\eta, t) d\eta, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t > 0, 0 < \xi < \infty; \\ f(\xi, 0) = f_0(\xi) \geq 0, (\leq \xi \leq \infty). \end{aligned} \quad (2)$$

При исследовании коагуляционных процессов в двухфазных средах используется задача Коши для системы из двух интегро-дифференциальных кинетических уравнений. В этом случае необходимо найти функции распределения $f_1(\xi, t)$ и $f_2(\xi, t)$ для частиц двух типов, которые должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_1(\xi, t)}{\partial t} &= I_{11}(f_1, f_1) + I_{12}(f_1, f_2), \\ \frac{\partial t_2(\xi, t)}{\partial t} &= I_{21}(f_2, f_1) + I_{22}(f_2, f_2), \\ t > 0, 0 < \xi < \infty; \end{aligned} \quad (3)$$

$$f_1(\xi, 0) = f_1^{(0)}(\xi) \geq 0, f_2(\xi, 0) = f_2^{(0)}(\xi) \geq 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} I_{pl}(f_p, f_l) &= - \int_0^\infty K_{pl}(\xi, \eta) f_p(\xi - \eta, t) f_l(\eta, t) d\eta + \\ &+ c_{pl} \cdot \int K_{pl}(\xi - \eta, \eta) f_p(\xi - \eta, t) f_l(\eta, t) d\eta; \end{aligned} \quad (5)$$

$p, l = 1, 2; c_{11} = 1, c_{12} = 0, c_{21} = 2, c_{22} = 1.$

В случае однофазных сред справедливы выражения:

$$\int_0^{\infty} f_0(\zeta) d\zeta = 1, \quad \int_0^{\infty} \zeta f_0(\zeta) d\zeta = 1, \quad K(\zeta, \eta), \quad K(\eta, \zeta) \geq 0, \\ (0 \leq \zeta, \eta \leq \infty).$$

А в случае двухфазных сред эти выражения записываются в виде:

$$\int_0^{\infty} \zeta [f_1(\zeta, t) + f_2(\zeta, t)] d\zeta = \text{const},$$

$$K_{ij}(\zeta, \eta) = K_{ij}(\eta, \zeta) = K_{ij}(\zeta, \eta) \geq 0.$$

В выражениях (1)–(5) использованы обозначения: $f(\zeta, t)$ и $f_i(\zeta, t)$ ($i = 1, 2$) – функция распределения частиц по массе в однофазной и двухфазной среде (облаке), ζ и η – массы частиц, t – время, $K(\zeta, t)$ и $K_{ij}(\zeta, t)$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) – коэффициенты коагуляции, характеризующие вероятности парных столкновений частиц в однофазной и двухфазной среде (i -го и j -го сортов) с массами ζ и η . Задачи (1)–(2) и (3)–(4) записаны в безразмерной форме.

Ниже результаты решения этих задач методом Бубнова – Галеркина и итерационно-матричным методом сравниваются с аналитическими решениями.

Метод Бубнова – Галеркина

Согласно методу Галеркина, приближенное решение задачи (1)–(2) ищется в виде линейной комбинации [7]:

$$f^N(\zeta, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) D_i(\alpha, \zeta), \quad (6)$$

где $a_i(t)$ – подлежащие определению коэффициенты;
 $D_i(\alpha, t)$ – система функций, ортонормированная на $(0, \infty)$;
 α – параметр ($\alpha > 0$).

Приближенные решения задачи (3)–(4) ищут в виде:

$$\begin{aligned} f^N(\zeta, t) &= \sum_{i=1}^N a_i(t) D_i(\alpha, \zeta) \\ f_2^N(\zeta, t) &= \sum_{i=1}^N b_i(t) D_i(\alpha, \zeta), \end{aligned} \quad (7)$$

где $a_i(t)$ и $b_i(t)$ неизвестные коэффициенты.

В выражениях (6) и (7) функции $D_i(\alpha, \zeta)$ записываются в виде:

$$\begin{aligned} D_i(\alpha, \zeta) &= \sum_{k=1}^i C_{ki} \exp(-\alpha k \zeta), \\ C_{ki} &= \frac{2\alpha i (i+k-1)}{k! (k-1)! (i-k)! (-1)^{i-k}} \end{aligned}$$

Тогда решение задачи (1)–(2) сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [7]:

$$\frac{da_m(t)}{dt} = \sum_{i,j=1}^N a_i(t) a_j(t) \cdot A_{ij}^m; \quad m = 0, 1, \dots, N. \quad (8)$$

$$a_m^0(t) = \int_0^\infty f_0(\zeta) D_m(\alpha, \zeta) d\zeta. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_{ij}^m &= - \int_0^\infty \int_0^\infty K(\zeta, \eta) D_i(\alpha, \zeta) D_j(\alpha, \eta) D_m(\alpha, \zeta) d\eta d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty K(\zeta - \eta, \eta) D_i(\alpha, \zeta - \eta) D_j(\alpha, \eta) D_m(\alpha, \zeta) d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Таким же образом решение задачи (3)–(4) сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных коэффициентов $a_m(t)$ и $b_m(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{da_m(t)}{dt} &= \sum_{i,j=1}^N a_i(t) a_j(t) \cdot B_{ij,m}^{11} + \sum_{i,j=1}^N a_i(t) b_j(t) \cdot B_{ij,m}^{12}, \\ \frac{db_m(t)}{dt} &= \sum_{i,j=1}^N b_i(t) a_j(t) \cdot B_{ij,m}^{21} + \sum_{i,j=1}^N b_i(t) b_j(t) \cdot B_{ij,m}^{22}, \\ (m &= 0, 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} a_m^0(t) &= \int_0^\infty f_1^0(\zeta) D_m(\alpha, \zeta) d\zeta; \\ b_m^0(t) &= \int_0^\infty f_2^0(\zeta) D_m(\alpha, \zeta) d\zeta; \end{aligned} \quad (11)$$

где параметр $B_{i,j,m}^{pl}$ равен выражению:

$$B_{i,j,m}^{pl} = \int_0^{\infty} D_m(\alpha, \zeta) I_{pl}(D_b, D_j) d\zeta;$$

$$p, l = 1, 2;$$

$$i, j, m = 1, 2, 3 \dots, N.$$

Решения задач (8)–(9) и (10)–(11) подставляются в выражения (6) и (7) и в результате получаем приближенные решения задач (1)–(2) и (3)–(4).

Итерационно-матричный метод

Для начала рассмотрим уравнение (1) с заданным начальным условием (2). Согласно методу конечных разностей [8], в выражении (1) можно сделать замену: $(\frac{\partial f}{\partial t}) \rightarrow \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta t}$, где Δt – шаг по времени, f_{n+1} и f_n – значения функции распределения частиц по массе в соседние моменты времени $n + 1$ и n . Аналогично преобразуем интегралы в сумму с шагом по массе $\Delta \eta$ ($\Delta \zeta = \Delta \eta$). Тогда в итерационной (явной) форме решение задачи (1)–(2) имеет вид:

$$f_i^{n+1} = f_i^n \left(1 - \Delta \eta \Delta t \sum_{j=0}^M K_j f_j^n \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i K_{i-j} f_{i-j}^n f_i^n \Delta \eta \Delta t, \quad (12)$$

$$f_i^0 = f_0(i \Delta \eta) \geq 0, \quad (0 \leq i \leq M) \quad (13)$$

где конечному элементу суммы с индексом $j = M$ соответствует Ξ – наибольшая предельная масса (вместо ∞), для масс выполнена замена переменных на соответствующие им индексы: $\zeta \rightarrow i, \eta \rightarrow j$.

Рассмотрим значения выражения f_i^{n+1} в (12) при различных индексах $i = 0, 1, \dots, m, \dots, M$, где m – некоторый индекс массы частицы. В правой части в первом слагаемом содержится постоянный множитель $C_n = \sum_{j=0}^M K_j f_j^n$.

Также введём векторы (аналог одномерной матрицы в линейной алгебре) для функции распределения частиц и коэффициента коагуляции:

$$F^n = (f_0^n \ f_1^n \ f_2^n \dots f_m^n \dots f_M^n),$$

$$K = (K_0 \ K_1 \ K_2 \dots K_m \dots K_M^n).$$

Вектор функции распределения F^n задан для частиц по массам $\xi_i = i\Delta\eta$: $W = (\xi_0 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_m \dots \xi_M) = (0 \Delta\eta 2\Delta\eta \dots \xi_m \dots \Xi)$, где $\xi = \xi_m$ – масса некоторой частицы, Ξ – наибольшая предельная масса, $\Xi \gg \xi_m$ (в дальнейшем полагаем, что $\Xi \geq 10\xi_m$).

Зададим вектор линейной или аperiodической свертки $S^n = (s_0^n s_1^n \dots s_m^n s_M^n)$, где элемент вектора свертки S_i^n равен выражению: $S_i^n = \sum_{j=0}^i f_{i-j}^n g_j^n$, здесь $f_{i-j}^n = K_{i-j} f_{i-j}^n$, $g_j^n = f_j^n$. Вычисление вектора свертки S^n осуществлялось методом быстрой свертки [9].

Тогда в итерационно-матричной форме [4] решение интегродифференциального кинетического уравнения, с учётом полученной ранее записи (12)–(13), имеет вид:

$$F^{n+1} = F^n - \Delta\eta\Delta t C^n \cdot F^n + \frac{1}{2} \Delta\eta\Delta t \cdot S^n, \quad (14)$$

$$F^0 = F^0(W). \quad (15)$$

В случае двухфазной среды в результате решения задачи (3)–(4) получаем систему уравнений итерационно-матричным методом по аналогии с полученными выражениями для коагуляции в однофазной среде (14)–(15):

$$F_1^{n+1} = F_1^n + \Delta\eta\Delta t (I_{11}^n + I_{12}^n), \quad (16)$$

$$F_2^{n+1} = F_2^n + \Delta\eta\Delta t (I_{21}^n + I_{22}^n).$$

$$F_1^0 = F_1^0(W); F_2^0 = F_2^0(W). \quad (17)$$

где I_{pl}^n – векторная запись подынтегрального выражения $I_{pl}^n(f_p, f_l)$ (5), здесь $p, l = 1, 2$. В общей форме I_{pl}^n можно представить в виде:

$$I_{pl}^n = C_{pl} \cdot F_p^n + c_{pl} \cdot S_{pl}^n;$$

$$C_{pl} = \sum_{j=0}^M K_{pl,j} f_{l,j}^n;$$

$$c_{11} = 1, c_{12} = 0, c_{21} = 2, c_{22} = 1,$$

где элемент вектора свертки $S_{pl,i}^n$ равен выражению:

$$S_{pl,i}^n = \sum_{j=0}^l f'_{pl,i-j}^n g_{pl,j}^n,$$

здесь $f'_{pl,i-j}^n = K_{pl,i-j}, g_{pl,j}^n = f_{lj}^n.$

Таким образом, при решении матрично-итерационного уравнения (14)–(15) F^{n+1} для некоторого момента времени $t = N\Delta t$ находят константу C^n и вектор S^n на каждом шаге итерации $n = 0, 1, 2, \dots, N$, где N – количество итераций. Совокупность векторов F^n представляет собой функцию распределения $f^{N2}(\xi, t)$. Аналогично для двухфазной среды (16)–(17) матрично-итерационный метод находит F_1^n и F_2^n , в результате получают численные результаты функции распределения частиц $F_1^n(\xi, t)$ и $F_2^n(\xi, t)$. Размер вектора F^n (F_1^n и F_2^n) равен $M = \Xi / \Delta\eta + 1$, где Ξ – наибольшая предельная масса частицы (используется вместо ∞), $\Delta\eta$ – шаг по массе.

Дополнительно стоит отметить, что при переходе к задачам коагуляции с N -мерным пространством функция распределения F^n будет записана в виде $N + 1$ -мерной матрицы (в данной задаче пространство безразмерное, поэтому имеем дело с одномерной матрицей или вектором).

Результаты исследований и их обсуждение

Результаты вычислений для коагуляционных процессов в однофазной среде получены при следующих начальных условиях и коэффициенте коагуляции: $f_0(\xi) = \exp(-\xi)$, $K(\xi, t) = 1$. В случае двухфазной среды они получены при начальных условиях $f_1^{(0)}(\xi) = f_2^{(0)}(\xi) = \exp(-\xi)$ и коэффициенте коагуляции $K_{ij}(\xi, t) = 1$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$).

Точное решение уравнения коагуляции в однофазной среде (1)–(2) при этих условиях имеет вид [7]:

$$f(\xi, t) = \left(\frac{2}{2+t} \right)^2 \exp\left(\frac{-2}{2+t} \xi \right). \quad (18)$$

а точные решения системы уравнений коагуляции в двухфазной среде (3)–(4) записывают в виде:

$$\begin{aligned} f_1(\xi, t) &= \left(\frac{1}{1+t}\right)^2 \exp\left(-\frac{2+t}{2+2t}\xi\right); \\ f(\xi, t) &= 2\left(\frac{1}{1+t}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{1+t}\xi\right); \\ f_2(\xi, t) &= f(\xi, t) - f_1(\xi, t). \end{aligned} \tag{19}$$

Функция $f(\xi, t) = f_1(\xi, t) + f_2(\xi, t)$ введена для удобства при аналитическом решении задачи (3)–(4).

Далее аналитические решения задач (1)–(2) и (3)–(4) сравниваются с численными решениями $f^N(\xi, t)$ и $f_1^N(\xi, t), f_2^N(\xi, t)$, полученными методом Бубнова – Галеркина (N_1) и итерационно-матричным методом (N_2).

Для решения задачи (1)–(2) методом Бубнова – Галеркина используют выражения (6), (8)–(9), матрично-итерационным методом – (14) и (15). Аналогично для задачи (3)–(4) решение методом Бубнова – Галеркина найдено с использованием выражений (7), (10)–(11), матрично-итерационным методом – (16) и (17).

Значения точного решения, приближенного решения методом Бубнова–Галеркина $f^{N_1}(\xi, t)$ (оптимальное решение достигается при заданных параметрах: $N=7, \alpha=0,5, \Delta t=5 \cdot 10^{-4}$) и итерационно-матричным методом $f^{N_2}(\xi, t)$ $\Delta \eta = 0,01, \Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ и $M = 10001$ — в этом случае предельная масса частицы равна $\Xi = 100$) задачи (1)–(2) приведены в таблице 1. Аналогично в таблице 2 приведены значения этих же решений задачи (3)–(4).

Функции распределения $f(\xi, t)$ и $f_1(\xi, t), f_2(\xi, t)$, массы частиц ξ и время t в данной задачи безразмерные, измеряются в единицах (ед.).

Таблица 1. ЗНАЧЕНИЯ ТОЧНОГО $f(\xi, t)$ И ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(2) МЕТОДОМ БУБНОВА–ГАЛЕРКИНА $f^{N_1}(\xi, t)$ И ИТЕРАЦИОННО-МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ $f^{N_2}(\xi, t)$
Table 1. Values of the exact $f(\xi, t)$ and approximate solution of the problem (1)–(2) by the Bubnov – Galerkin method $f^{N_1}(\xi, t)$ and the iterative matrix method $f^{N_2}(\xi, t)$

ξ	$t = 3$			$t = 10$		
	$f_1(\xi, t)$	$f_1^{N_1}(\xi, t)$	$f_1^{N_2}(\xi, t)$	$f_2(\xi, t)$	$f_2^{N_1}(\xi, t)$	$f_1^{N_2}(\xi, t)$
0	0,160	0,162	0,160	0,028	0,035	0,028
0,4	0,136	0,136	0,137	0,026	0,028	0,026

Таблица 1. ОКОНЧАНИЕ

ξ	$t = 3$			$t = 10$		
	$f_1(\xi, t)$	$f_1^{N1}(\xi, t)$	$f_1^{N2}(\xi, t)$	$f_2(\xi, t)$	$f_2^{N1}(\xi, t)$	$f_1^{N2}(\xi, t)$
0,8	0,116	0,117	0,116	0,024	0,025	0,024
1,2	0,099	0,099	0,099	0,023	0,025	0,023
1,6	0,084	0,084	0,085	0,021	0,024	0,021
2	0,072	0,071	0,072	0,020	0,021	0,020
2,4	0,061	0,061	0,061	0,019	0,020	0,019
2,8	0,052	0,052	0,052	0,017	0,017	0,017
3,2	0,044	0,045	0,045	0,016	0,016	0,016
3,6	0,038	0,039	0,038	0,015	0,016	0,015
4	0,032	0,033	0,032	0,014	0,016	0,014
4,4	0,028	0,028	0,028	0,013	0,016	0,013
4,8	0,023	0,024	0,023	0,012	0,016	0,013
5,2	0,020	0,020	0,020	0,012	0,015	0,012
5,6	0,017	0,017	0,017	0,011	0,014	0,011
6	0,015	0,014	0,015	0,010	0,012	0,010
6,4	0,012	0,012	0,012	0,010	0,012	0,010
6,8	0,011	0,010	0,011	0,009	0,009	0,009
7,2	0,009	0,008	0,009	0,008	0,009	0,008
7,6	0,008	0,007	0,008	0,008	0,008	0,008
8	0,007	0,006	0,007	0,007	0,007	0,007
8,4	0,006	0,005	0,006	0,007	0,006	0,007
8,8	0,005	0,004	0,005	0,006	0,005	0,006
9,2	0,004	0,003	0,004	0,006	0,004	0,006
9,6	0,003	0,003	0,003	0,006	0,003	0,006
10	0,003	0,002	0,003	0,005	0,003	0,005

Источник: составлено авторами.
Source: compiled by the authors.

Таблица 2. ЗНАЧЕНИЯ ТОЧНЫХ $f_1(\xi, t)$, $f_2(\xi, t)$ И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (3)–(4) МЕТОДОМ БУБНОВА – ГАЛЕРКИНА $f_1^{N1}(\xi, t)$, $f_2^{N1}(\xi, t)$ И ИТЕРАЦИОННО-МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ $f_1^{N2}(\xi, t)$, $f_2^{N2}(\xi, t)$
Table 2. Values of exact $f_1(\xi, t)$, $f_2(\xi, t)$ and approximate solutions of problem (3)–(4) by the Bubnov – Galerkin method $f_1^{N1}(\xi, t)$, $f_2^{N1}(\xi, t)$ and the iterative-matrix method $f_1^{N2}(\xi, t)$, $f_2^{N2}(\xi, t)$

ξ	$t = 1$					
	$f_1(\xi, t)$	$f_1^{N1}(\xi, t)$	$f_1^{N2}(\xi, t)$	$f_2(\xi, t)$	$f_2^{N1}(\xi, t)$	$f_2^{N2}(\xi, t)$
0	0,250	0,249	0,250	0,250	0,250	0,251
0,2	0,215	0,215	0,215	0,237	0,237	0,238
0,4	0,185	0,185	0,185	0,224	0,224	0,225
0,6	0,159	0,159	0,159	0,211	0,211	0,212
0,8	0,137	0,137	0,137	0,198	0,198	0,199
1	0,118	0,118	0,118	0,185	0,185	0,186
1,2	0,102	0,101	0,102	0,173	0,172	0,174
1,4	0,087	0,087	0,087	0,161	0,160	0,162
1,6	0,075	0,075	0,075	0,149	0,149	0,150
1,8	0,065	0,065	0,065	0,138	0,138	0,139
2	0,056	0,056	0,056	0,128	0,128	0,129
2,2	0,048	0,048	0,048	0,118	0,118	0,119
2,4	0,041	0,041	0,041	0,109	0,109	0,110
2,6	0,036	0,036	0,036	0,101	0,100	0,101
2,8	0,031	0,031	0,031	0,093	0,092	0,093
3	0,026	0,026	0,026	0,085	0,085	0,086
3,2	0,023	0,023	0,023	0,078	0,078	0,079
3,4	0,020	0,019	0,020	0,072	0,072	0,072
3,6	0,017	0,017	0,017	0,066	0,066	0,066
3,8	0,014	0,014	0,014	0,060	0,060	0,061
4	0,012	0,012	0,012	0,055	0,055	0,056
4,2	0,011	0,011	0,011	0,051	0,051	0,051
4,4	0,009	0,009	0,009	0,046	0,046	0,047
4,6	0,008	0,008	0,008	0,042	0,042	0,043
4,8	0,007	0,007	0,007	0,039	0,038	0,039
5	0,006	0,006	0,006	0,035	0,035	0,035

Таблица 2. ОКОНЧАНИЕ

	t = 25					
ξ	$f_1(\xi, t)$	$f_1^{N1}(\xi, t)$	$f_1^{N2}(\xi, t)$	$f_2(\xi, t)$	$f_2^{N1}(\xi, t)$	$f_2^{N2}(\xi, t)$
0	0,082	0,083	0,080	0,082	0,090	0,082
0,2	0,072	0,073	0,071	0,082	0,082	0,082
0,4	0,063	0,064	0,062	0,083	0,086	0,083
0,6	0,056	0,056	0,055	0,082	0,084	0,082
0,8	0,049	0,049	0,048	0,081	0,081	0,081
1	0,043	0,044	0,043	0,080	0,079	0,080
1,2	0,038	0,038	0,037	0,078	0,078	0,078
1,4	0,033	0,034	0,033	0,076	0,078	0,077
1,6	0,029	0,030	0,029	0,074	0,077	0,075
1,8	0,026	0,026	0,026	0,072	0,075	0,072
2	0,023	0,023	0,023	0,070	0,072	0,070
2,2	0,020	0,020	0,020	0,067	0,069	0,068
2,4	0,017	0,018	0,017	0,065	0,066	0,065
2,6	0,015	0,016	0,015	0,062	0,062	0,063
2,8	0,013	0,014	0,014	0,060	0,059	0,060
3	0,012	0,012	0,012	0,057	0,056	0,058
3,2	0,010	0,011	0,011	0,055	0,054	0,056
3,4	0,009	0,009	0,009	0,053	0,051	0,053
3,6	0,008	0,008	0,008	0,050	0,050	0,051
3,8	0,007	0,007	0,007	0,048	0,048	0,049
4	0,006	0,006	0,006	0,046	0,047	0,047
4,2	0,005	0,006	0,006	0,044	0,045	0,044
4,4	0,005	0,005	0,005	0,042	0,044	0,042
4,6	0,004	0,004	0,004	0,040	0,042	0,040
4,8	0,004	0,004	0,004	0,038	0,041	0,038
5	0,003	0,003	0,003	0,036	0,039	0,037

Источник: составлено авторами.
Source: compiled by the authors.

Результаты расчетов для промежутков времени t до 10 ед. при однофазовой коагуляции и до 2,5 ед. при двухфазовой коагуляции показывают хорошее согласие приближенных решений задач (1)–(2) и (3)–(4) с точными. Однако матрично-итерационный метод оказывается более точным, для него погрешность приближенных функций распределения $\Delta f^N(\xi, t)$ не превышает $\pm 0,002$. Для повышения точности расчетов методом Бубнова – Галеркина необходимо дополнительно решать задачи оптимизации, которые рассмотрены в других работах, включая исследования более сложных математических моделей в физике облаков [7]

Кроме того, рассмотрено решение задачи двухфазовой коагуляции (3)–(4) для более поздних моментов времени с помощью матрично-итерационного метода. Результаты, приведенные в таблице 3 для момента времени $t = 25$ ед., аналогично показывают хорошее согласие приближенных решений задачи (3)–(4) с точными, относительная погрешность функций распределения $\Delta f^N(\xi, t)$ не превышает 10 %. При этом, значения функции распределения $f(\xi, t)$ имеют порядок 0,0001–0,001, тогда как заданные шаги по массе и времени равны $\Delta \eta = 0,01$, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ соответственно. Это подтверждает эффективность (высокую работоспособность) разработанного матрично-итерационного метода, который в текущей работе является модификацией метода конечных разностей.

Таблица 3. ЗНАЧЕНИЯ ТОЧНЫХ $f_1(\xi, t)$, $f_2(\xi, t)$ И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (3)–(4) ИТЕРАЦИОННО-МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ $f_1(\xi, t)$, $f_2(\xi, t)$ В БОЛЕЕ ПОЗДНИЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ ($t = 25$ ед.)
Table 3. Values of exact $f_1(\xi, t)$, $f_2(\xi, t)$ and approximate solutions of problem (3)–(4) by the iterative-matrix method $f_1(\xi, t)$, $f_2(\xi, t)$ at a later point in time ($t = 25$ units)

	$t = 25$			
ξ	$f_1(\xi, t)$	$f_1^M(\xi, t)$	$f_2(\xi, t)$	$f_2^{N2}(\xi, t)$
0	0,00148	0,00143	0,00148	0,00146
0,2	0,00133	0,00129	0,00160	0,00158
0,4	0,00120	0,00117	0,00171	0,00169
0,6	0,00108	0,00105	0,00181	0,00178
0,8	0,00098	0,00095	0,00189	0,00186

Таблица 3. ОКОНЧАНИЕ

ξ	$t = 25$			
	$f_1(\xi, t)$	$f_1^{N1}(\xi, t)$	$f_2(\xi, t)$	$f_2^{N2}(\xi, t)$
1	0,00088	0,00086	0,00197	0,00194
1,2	0,00079	0,00077	0,00203	0,00200
1,4	0,00072	0,00070	0,00209	0,00206
1,6	0,00064	0,00063	0,00214	0,00210
1,8	0,00058	0,00057	0,00218	0,00215
2	0,00052	0,00051	0,00222	0,00218
2,2	0,00047	0,00046	0,00225	0,00221
2,4	0,00043	0,00042	0,00227	0,00224
2,6	0,00038	0,00038	0,00229	0,00226
2,8	0,00035	0,00034	0,00231	0,00228
3	0,00031	0,00031	0,00232	0,00229
3,2	0,00028	0,00028	0,00234	0,00230
3,4	0,00025	0,00025	0,00234	0,00231
3,6	0,00023	0,00022	0,00235	0,00232
3,8	0,00021	0,00020	0,00235	0,00232
4	0,00019	0,00018	0,00235	0,00232
4,2	0,00017	0,00016	0,00235	0,00232
4,4	0,00015	0,00015	0,00235	0,00232
4,6	0,00014	0,00013	0,00234	0,00231
4,8	0,00012	0,00012	0,00234	0,00231
5	0,00011	0,00011	0,00233	0,00230

Источник: составлено авторами.
Source: compiled by the authors.

В качестве особенностей методов можно отметить:

— метод Бубнова–Галеркина требует количество вычислений (операций), пропорциональное N^3 , также для повышения точности результатов необходимо решать задачи оптимизации (например, минимиза-

ция функционала). Но стоит отметить, что данный метод позволяет определять распределение частиц на неограниченном диапазоне масс.

— матрично-итерационный метод является модификацией метода конечных разностей, он упрощает вычисления и не требует дополнительных параметров. Однако дискретность масс частиц является значимым недостатком этого метода. В данной тестовой задаче при шаге $\Delta\eta = 0,01$ и предельной массе частицы (в функции распределения) $\Xi = 100$, количество элементов в векторах достигает $M + 1 = 10001$, что ограничивает расчетные возможности при дальнейшем увеличении диапазона масс.

В других работах [10, 11] для уменьшения количества точек расчета $M + 1$ пользуются переходом к новой функции $f(\xi, t) \rightarrow \varphi(j, t)$, где $j = 1 + \log_2(\xi/\xi_1)$. Это может повлиять на точность результатов (из-за необходимости аппроксимации функции $\varphi(j_c, t)$, где $j_c = j + \ln(1 - \eta/\xi) \ln \sqrt{2} \neq Z$, Z – целое число), однако позволяет находить распределение частиц в реальных условиях.

Соответственно, математические модели в физике облаков были также получены и решены как с помощью метода Бубнова–Галеркина [7], так и при использовании метода конечных разностей [12]. Кроме того, немало других работ посвящено задачам коагуляции, при рассмотрении кинетических уравнений решение также находят с помощью указанных численных методов и их модификаций [13–15].

Заключение

В данной работе рассмотрены и протестированы два метода: матрично-итерационный и метод Бубнова–Галеркина, на примере кинетического уравнения коагуляции (1)–(2) и его системы (3)–(4), для которых ранее было известно аналитическое решение (18), (19) [7].

Кратко изложены ключевые положения и алгоритм решения метода Бубнова–Галеркина для данных тестовых задач (1)–(2) и

(3)–(4) [7]. Также представлен разработанный алгоритм решения кинетического уравнения с использованием матрично-итерационного метода, который является модификацией метода конечных разностей [4, 8]. Численное решение, полученное этим методом, позволяет наглядно представить функцию распределения $f(\xi, t)$ в векторном виде F^n на каждом шаге итерации n .

Результаты численных экспериментов показывают, что оба метода могут быть эффективно применены для исследования трансформации микроструктурных характеристик однофазных и смешанных дисперсных систем с высокой точностью. Использование как матрично-итерационного метода, так и метода Бубнова–Галеркина в ходе компьютерного эксперимента, с учётом их особенностей при проведении вычислений, делает перспективным моделирование процессов формирования и развития облаков на основе полных моделей.

Список источников

1. Ашабоков Б. А., Федченко Л. М., Шаповалов В. А. Современное состояние и основные направления развития физики облаков и активных воздействий // Проблемы физики атмосферы, климатологии и мониторинга окружающей среды: Доклады IV Международной научной конференции (Ставрополь, 23–25 мая 2022 года). Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет, 2022. С. 16–23.
2. Ашабоков Б. А., Федченко Л. М., Лесев В. Н., Шаповалов В. А. Результаты моделирования роли взаимодействия процессов в градовых облаках в формировании их макро- и микроструктурных характеристик // Доклады Всероссийской открытой конференции по исследованиям атмосферных и склоновых стихийных явлений в условиях современного изменения климата, посвященной 190-летию создания гидрометеорологической службы России и 90-летию Эльбрусской Высокогорной комплексной экспедиции АН СССР (Нальчик, 07–11 октября 2024 года). Нальчик: Издательская типография «Принт Центр», 2024. С. 18–21.
3. Ашабоков Б. А., Федченко Л. М., Шаповалов В. А. Некоторые результаты исследований роли взаимодействия про-

- цессов в конвективных облаках в формировании их макро- и микроструктурных характеристик // Системный синтез и прикладная синергетика: Сборник научных работ XI Всероссийской научной конференции (п. Нижний Архыз, 27 сентября – 1 октября 2022 года). Ростов-на-Дону – Таганрог: Южный федеральный университет, 2022. С. 310–314.
4. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 352 с.
 5. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях; пер. с англ. В. П. Садокова. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 134 с.
 6. Пененко В. В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 352 с.
 7. Калажоков Х. Х. Математическое моделирование облачных процессов. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2003. 166 с.
 8. Кольцова Э. М., Скичко А. С., Женса А. В. Численные методы решения уравнений математической физики и химии: учебное пособие для вузов. 2-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во Юрайт, 2024. 220 с.
 9. Птицын Н. В. Разностный метод интегрального преобразования изображения // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Приборостроение». 2005. № 3. С. 58–64.
 10. Ашабоков Б. А., Шаповалов А. В. Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2008. 254 с.
 11. Ашабоков Б. А., Федченко Л. М., Шаповалов А. В., Шаповалов В. А. Физика облаков и активных воздействий на них. Нальчик: Печатный двор, 2017. 240 с.
 12. Мазин И. П., Коган Е. Л., Сергеев Б. Н., Хворостьянов В. И. Численное моделирование облаков. М.: Гидрометеиздат, 1984. 185 с.
 13. Петров А. М. Моделирование физико-химических процессов образования и коагуляции частиц в смешанных облаках с учётом фазовых переходов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 02.00.04 / Петров Александр Михайлович; [Место защиты: Науч.-исслед. физ.-хим. ин-т им. Л. Я. Карпова]. Саров, 2014. 20 с.
 14. Затевахин М. А., Игнатьев А. А., Рамаросон Р., Говоркова В. А. Численное исследование процесса коагуляции аэрозольных частиц в турбулентном пограничном слое атмос-

феры. // Труды Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова. 2009. № 559. С. 161–191.

- 15 Пискунов В. Н., Гайнуллин К. Г., Петров А. М., Затевахин М. А., Станкова Е. Н. Моделирование кинетики формирования осадков в смешанном облаке // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 4. С. 438–447.

References

1. Ashabokov BA, Fedchenko LM, Shapovalov VA. Current state and main directions of development of cloud physics and active influences. In Problems of atmospheric physics, climatology and environmental monitoring: Reports of the IV International Scientific Conference, Stavropol, May 23–25, 2022. Stavropol: North-Caucasus Federal University; 2022;16-23. (In Russ.).
2. Ashabokov BA, Fedchenko LM, Lesev VN, Shapovalov VA. Results of modeling the role of interaction of processes in hail clouds in the formation of their macro- and microstructural characteristics. In Reports of the All-Russian Open Conference on the Study of Atmospheric and Slope Natural Phenomena in the Context of Modern Climate Change, Dedicated to the 190th Anniversary of the Establishment of the Hydrometeorological Service of Russia and the 90th Anniversary of the Elbrus High-Mountain Complex Expedition of the USSR Academy of Sciences, Nalchik, October 7–1, 2024. Nalchik: Print Center Publishing House; 2024;18-21. (In Russ.).
3. Ashabokov BA, Fedchenko LM, Shapovalov VA. Some Results of Studies of the Role of Interaction of Processes in Convective Clouds in the Formation of Their Macro- and Microstructural Characteristics. In Systems Synthesis and Applied Synergetics: Collection of Scientific Papers of the XI All-Russian Scientific Conference, Nizhny Arkhyz, September 27 – October 01, 2022. Rostov-on-Don – Taganrog: Southern Federal University; 2022;310-314. (In Russ.).
4. Marchuk GI. Methods of computational mathematics. Moscow: Nauka; 1977. 352 p. (In Russ.).
5. Mesinger F, Arakawa A. Numerical methods used in atmospheric models; transl. from English by VP Sadokova. Leningrad: Gidrometeoizdat; 1979. 134 p. (In Russ.).
6. Penenko VV. Methods of numerical modeling of atmospher-

- ic processes. Leningrad: Gidrometeoizdat; 1981. 352 p. (In Russ.).
7. Kalazhokov HKh. Mathematical modeling of cloud processes. Nalchik: Publishing House of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences; 2003. 166 p. (In Russ.).
 8. Koltsova EM, Skichko AS, Zhensa AV. Numerical Methods for Solving Equations of Mathematical Physics and Chemistry: A Textbook for Universities. 2nd ed., corrected and supplemented. Moscow: Publishing House Yurait; 2024. 220 p. (In Russ.).
 9. Ptitsyn NV. Difference Method of Integral Image Transformation. Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. Series "Instrument Engineering". 2005;(3):58-64. (In Russ.).
 10. Ashabokov BA, Shapovalov AV. Convective Clouds: Numerical Models and Simulation Results in Natural Conditions and under Active Influence. Nalchik: Publishing House of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences; 2008. 254 p. (In Russ.).
 11. Ashabokov BA, Fedchenko LM, Shapovalov AV, Shapovalov VA. Physics of Clouds and Active Impacts on Them. Nalchik: Pechatny Dvor; 2017. 240 p. (In Russ.).
 12. Mazin IP, Kogan EL, Sergeev BN, Khvorostyanov VI. Numerical Modeling of Clouds. Moscow: Gidrometeoizdat; 1984. 185 p. (In Russ.).
 13. Petrov AM. Modeling of Physicochemical Processes of Formation and Coagulation of Particles in Mixed Clouds Taking into Account Phase Transitions: abstract of dissertation of cand. phys. and math. sciences: 02.00.04. Petrov Alexander Mikhailovich; [Place of protection: Research Phys.-Chem. Institute named after LYa Karpov]. Sarov; 2014. 20 p. (In Russ.).
 14. Zatevakhin MA, Ignatiev AA, Ramarosan R, Govorkova VA. Numerical study of the process of coagulation of aerosol particles in the turbulent boundary layer of the atmosphere. Transactions of the Main Geophysical Observatory named after AI Voeikov. 2009;(559):161-191. (In Russ.).
 15. Piskunov VN, Gainullin KG, Petrov AM, Zatevakhin MA, et al. Modeling the kinetics of precipitation formation in a mixed cloud. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics of the Atmosphere and Ocean. 2022;58(4):438-447. (In Russ.).

Информация об авторах

Игорь Сергеевич Афанасьев – аспирант, направление подготовки 05.06.01 Науки о Земле, направленность 1.6.18 «Науки об атмосфере и климате», Высокогорный геофизический институт, Researcher ID: AEO-9994-2022.

Борис Азреталиевич Ашабоков – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом физики облаков Высокогорного геофизического института; заведующий отделом ИИПРУ КБНЦ РАН, Scopus ID: 6505916110, Researcher ID: K-4299-2015.

Вклад авторов

Статья была написана в ходе научно-исследовательской деятельности аспиранта Игоря Сергеевича Афанасьева под руководством профессора Бориса Азреталиевича Ашабокова.

Information about the authors

Igor S. Afanasyev – Postgraduate Student, field of study 05.06.01 – Earth Sciences, 1.6.18 “Atmospheric and Climate Sciences”, High-Mountain Geophysical Institute, Researcher ID: AEO-9994-2022.

Boris A. Ashabokov – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Department of Cloud Physics, High-Mountain Geophysical Institute; Head of Department of Institute of Informatics and Regional Management Problems, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Scopus ID: 6505916110, Researcher ID: K-4299-2015.

Contribution of the authors

The article was written during the research activities of Postgraduate Student Igor S. Afanasyev under the supervision of Professor Boris A. Ashabokov.